

Összefoglaló: Properties of a Family of Random Self-Similar Iterated Function Systems on the Line

(Egydimenziós véletlen önhasonló iterált függvényrendszerek tulajdonságai)

Orgoványi Vilma

A disszertáció a statisztikailag önhasonló egydimenziós halmazok egy speciális családját vizsgálja. A család prominens példái a véletlen szivacsok racionális projekciói. Itt *szivacs* alatt egy olyan önhasonló halmazt értünk, amelyet úgy hozunk létre, hogy a teret rekurzívan felosztjuk egy tengelypárhuzamos, $1/L$ oldalhosszúságú rácsra, melyből valamilyen szabály alapján megtartunk és eldobunk bizonyos részterületeket. A kutatás célja annak feltérképezése, hogy a valószínűségi paraméterek változtatásával miként alakul a kapott véletlen attraktor Hausdorff-dimenziója, Lebesgue-mértéke, illetve, hogy az tartalmaz-e belső pontokat.

A kérdésfelvetés egészen a Marstrand-féle vetítési tételig vezethető vissza. Eszerint ugyanis, ha egy síkbeli Borel-halmaz dimenziója nagyobb, mint egy, akkor majdnem minden vetületének pozitív a hossza, míg ha a dimenzió kisebb, mint egy, akkor a vetítés nem csökkenti a halmaz dimenzióját majdnem minden irányú vetítés esetén. Bizonyos véletlen halmazcsaládra – a Mandelbrot perkolációs halmazra – ennél erősebb állítás is igaz. A kétdimenziós térben ennek konstrukciója a következő: Rögzítünk egy $L > 1$ egész számot és egy $0 < p \leq 1$ valószínűséget. A zárt egységnégyzetet L^2 darab egybevágó résznégyzetre osztjuk, melyek mindegyikét egymástól függetlenül p valószínűséggel megtartjuk, $1 - p$ valószínűséggel pedig elvetjük. Ezt a folyamatot a megmaradt négyzetekben ismételjük a végtelenségig, vagy amíg nem marad több négyzet. Az így kapott halmazt Mandelbrot perkolációs halmaznak nevezzük. Ez $p > 1/L^2$ választás esetén pozitív valószínűséggel nem üres halmaz, melynek a dimenziója $\log(L^2 p) / \log(L)$ majdnem biztosan feltéve, hogy a halmaz nem üres. A Mandelbrot perkoláció esetében, ha a halmaz dimenziója nagyobb, mint egy, akkor a vetület tartalmaz intervallumot majdnem biztosan, feltéve, hogy a halmaz nem üres, szimultán minden irányba vett vetület esetén. Ha a dimenzió kisebb vagy egyenlő, mint egy, akkor a dimenzió nem esik. Ezzel szemben, több, az irodalomban megtalálható példa mutatja, hogy amennyiben a perkolációs folyamatot megszorítjuk egy síkbeli (nem triviális) szivacs építőelemeire, akkor teljesen más kép rajzolódik ki. A dolgozatom célja ezen kép finomítása: egy az irodalomban található nál tágabb család vizsgálata (a korábban ismertnél bonyolultabb átfedésrendszerek is megengedettek), és a tulajdonságok átfogó vizsgálata. A dolgozat fő eredményei a következőképpen foglalhatóak össze:

- Lebesgue-mérték pozitivitása:** A dolgozat a Lyapunov-exponens segítségével ad éles feltételt arra, hogy a véletlen attraktornak mikor pozitív a Lebesgue-mértéke. Amennyiben a Lyapunov-exponens pozitív, a mérték is pozitív, míg negatív vagy bizonyos kritikus esetekben a mérték nulla.
- Hiányzó belső pontok feltétele:** Bizonyítjuk, hogy ha a rendszert leíró mátrixok alsó spektrálsugarára egynél kisebb, akkor az attraktor belseje majdnem biztosan üres, még pozitív Lebesgue-mérték esetén is.
- Pozitív Lebesgue-mérték, de üres belső:** Feltételeket keresünk, amelyek mellett a véletlen attraktor Lebesgue-mértéke pozitív, ugyanakkor nincsenek belső pontjai. Részleges megoldást fogalmazzunk meg a rendszert leíró mátrixokhoz tartozó szubadditív nyomásfüggvény konvexitásának felhasználásával.
- Belső pontok:** Elégséges feltételt adunk arra, hogy az attraktor majdnem biztosan tartalmazzon belső pontot.
- Dimenzióelméleti eredmények:** A disszertációban a szubadditív nyomásfüggvény segítségével megadjuk a véletlen attraktor dimenzióját.

A dolgozat a kidolgozott elméletet olyan konkrét példákon keresztül szemlélteti, mint a jobb oldali Sierpiński-szőnyeg 45 fokos vetülete.