

Properties of a Family of Random Self-Similar Iterated Function Systems on the Line

Egydimenziós véletlen önhasonló iterált függvényrendszerek
tulajdonságai

Tézisfüzet

Orgoványi Vilma



BME

BUDAPESTI MŰSZAKI
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
EGYETEM

2026

Témavezető: Prof. Simon Károly
Matematika Intézet, Sztochasztika Tanszék

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
2. Felépítés	4
3. Eredmények és alkalmazások	7
4. Példák	15

1. Bevezetés

Ebben a tézisfűzetben rövid összefoglalót adunk a disszertáció motivációjáról, ismertetjük a disszertáció főbb tételeit, és bemutatunk néhány alkalmazást. A disszertáció a statisztikailag önhasonló halmazok egy speciális családjáról szól.

A Mandelbrot perkolációt \mathbb{R}^2 -ben a következőképpen konstruáljuk induktív módon. Rögzítünk egy $L \geq 2$ egész számot és egy $p \in (0, 1]$ valószínűségi paramétert. A zárt egységnégyzetet L^2 egybevágó résznégyzetre osztjuk, amelyek mindegyikét egymástól függetlenül p valószínűséggel megtartjuk, és $1 - p$ valószínűséggel elhagyjuk. Ezt a folyamatot a megtartott négyzetekben a végtelenségig ismétljük, vagy amíg nem marad több négyzet, melynek eredményeképpen kapjuk a *Mandelbrot perkolációt*. Ezt a perkolációs folyamatot egy 2-dimenziós szivacs építőköveire megszorítva egy véletlen szivacsot kapunk. Véletlen szivacsok egyenesekre vett racionális vetületeit¹ vizsgáljuk a Hausdorff-dimenzió, a Lebesgue-mérték pozitivitása és belső pontok létezése szempontjából. A Mandelbrot-perkolációval ellentétben a szivacs térbeli inhomogenitása kvalitatíve eltérő jelenségeket eredményez.

A 2-dimenziós szivacsok egy jól ismert példája a Sierpiński-szőnyeg, azonban ebben a tézisfűzetben a sokkal egyszerűbb *derékszögű Sierpiński-szőnyegre* fókuszálunk, ennek konstrukciójához lásd az 4. szakaszt.

1.1. A kutatás motivációja

A projekcióelmélet egyik korai, meghatározó eredménye Marstrand vetülettétéle 1954-ből [15].

1.1. Tétel. *Legyen $E \subset \mathbb{R}^2$ egy Borel-halmaz. Ekkor a következők teljesülnek.*

- *Ha $\dim_{\mathbb{H}} E > 1$, akkor E majdnem minden egyenesre vett vetülete pozitív Lebesgue-mértékű.*

¹racionális vetületek alatt racionális iránytangensű egyenesekre vett merőleges vetületeket értünk. Szivacsok alatt olyan önhasonló halmazokat értünk, amelyek első szintű hengerei egy $1/L$ -rácshoz illeszkednek valamely $2 \leq L \in \mathbb{N}$ esetén.

- Ha $\dim_{\mathbb{H}} E > 1$, akkor E majdnem minden egyenesre vett vetületének a Hausdorff-dimenziója megegyezik E dimenziójával.

Itt csak néhány, véletlen halmazokhoz kapcsolódó tétel említünk azon számos eredmény közül, amelyek megszületését ezen tétel inspirálta. Jelölje $\mathcal{M}_p = \mathcal{M}_p^L$ az L és p paraméterű Mandelbrot-perkolációt. Jól ismert (lásd például Kahane [13], Hawkes [11], Falconer [6], Mauldin-Williams [16]), hogy ebben az esetben

$$\dim_{\mathbb{H}} \mathcal{M}_p = \frac{\log L^2 p}{\log L} \text{ majdnem biztosan az } \mathcal{M}_p \neq \emptyset \text{ feltétel mellett}^2. \quad (1.1)$$

A következő tétel azt mutatja, hogy a Mandelbrot-perkolációra Marstrand tételének egy erősebb változata teljesül.

1.2. Tétel (Rams-Simon, [22], [23]). • Ha $\dim_{\mathbb{H}} \mathcal{M}_p > 1$, akkor a nem-kihálás feltétele mellett majdnem biztosan az összes egyenesre vett vetület szimultán tartalmaz intervallumot.

- Ha $\dim_{\mathbb{H}} \mathcal{M}_p \leq 1$, akkor majdnem biztosan az összes egyenesre vett vetület Hausdorff-dimenziója megegyezik $\dim_{\mathbb{H}} \mathcal{M}_p$ értékével.

A fenti állítás azért teljesülhet szimultán *minden irányra*, mert a Mandelbrot-féle perkolációs fraktál térben homogén. Simon és Vágó megmutatta a [26] cikkben, hogy ha egy analóg perkolációs folyamatot tekintünk a Sierpiński-szőnyeget is alkotó négyzeteken, akkor a kapott véletlen halmazra a 1.2 Tétel nem teljesül.

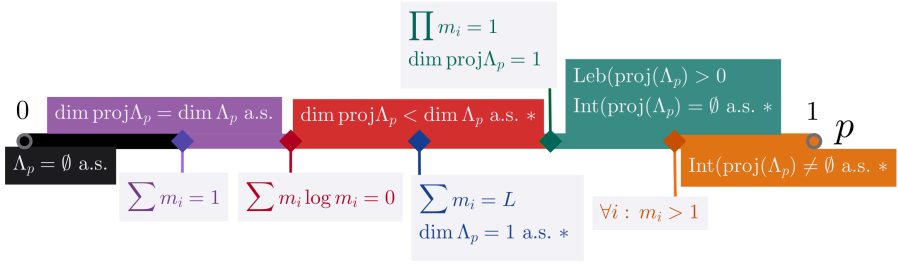
1.3. Tétel (Simon-Vágó [26]). Jelölje \mathcal{S}_p a p paraméterű véletlen Sierpiński-szőnyeget. Minden racionális tangensű α szöghöz létezik egy I_α paraméterintervallum úgy, hogy $p \in I_\alpha$ esetén szimultán $\dim_{\mathbb{H}} \mathcal{S}_p > 1$, de a $\text{proj}_\alpha \mathcal{S}_p$ nem tartalmaz belső pontot majdnem biztosan.

Megjegyezzük, hogy ez összességében nem olyan meglepő; már a determinisztikus esetben is jól ismert, hogy szivacsoknál a racionális irányokban vett vetületek általában kivételesek.³

Természetes a kérdés, hogy milyen viselkedéseket figyelhetünk meg, ahogy a p valószínűségi paramétert változtatjuk véletlen *inhomogén szivacsok* (mint például a véletlen Sierpiński-szőnyeg) racionális vetületei esetén.

Tengely-vetületek Egy már alaposan vizsgált eset az, amikor a koordinátatengelyekre vett vetületeket vizsgáljuk. Ezt Falconer, Dekking, Grimmet és Meester tanulmányozta a Hausdorff- és a dobozdimenzió [3, 9. tétel] és [7], a belső pontok létezése [8], illetve a Lebesgue-mérték pozitivitása [3, 8. tétel] szempontjából. Megjegyezzük, hogy ezek az eredmények a példák egy

³Izd. pl. a négy-sarok halmazt.



1. ábra. A paraméterintervallumok és határaik a p valószínűségi paraméter változtatásakor, abban az esetben, amikor egy Λ_p véletlen szivacsot a koordinátatengelyre vetítünk. A vetített halmazt $\text{proj } \Lambda_p$ jelöli, m_i az oszloponkénti várható értékeket jelöli, a * pedig a nem-kihalás feltételére utal.

általánosabb családjára is érvényesek annál, ahogyan itt prezentáljuk őket. Az eredmények az $\{m_i\}_{i \in [L]}$ oszlopra megszorított várható értékeken alapulnak. Nevezetesen legyen m_i azon első szintű négyzetek várható száma, amelyek az i -edik L -adikus intervallumra vetülnek: $[iL^{-1}, (i+1)L^{-1}]$. Ekkor bizonyos gyenge regularitási feltételek mellett a következő teljesül a vetített $\text{proj } \Lambda$ véletlen halmazra:

1. Ha $m_i > 1$ minden i -re, akkor $\text{proj } \Lambda$ tartalmaz belső pontot a nem-kihalás feltétele mellett.
2. Ha $\prod_{i=0}^{L-1} m_i > 1$, akkor $\text{proj } \Lambda$ pozitív Lebesgue-mértékű majdnem biztosan a nem-kihalás feltétele mellett,
3. $\dim_{\text{H}} \text{proj } \Lambda = \dim_{\text{B}} \text{proj } \Lambda = \inf_{t \in [0,1]} \log(\sum_{i=0}^{L-1} m_i^t) / \log(L)$ majdnem biztosan a nem kihalás feltétele mellett.

A fentieket néhány következménnyel együtt a 1. ábra foglalja össze abban az esetben, amikor nem minden m_i egyezik meg⁴. **Véletlen Cantor-halmazok összegei** Itt csak megemlítjük, hogy [4, 5, 17] cikkekben a szerzők 1-dimenziós véletlen Cantor-halmazok különbségeit vizsgálták. Ezen halmazok kapcsolata a racionális vetületekkel abból fakad, hogy két halmaz különbsége a szorzathalmaz 45 fokos vetületének egy átskálázott változata. A szerzők hasonló szempontokból vizsgálták ezen halmazokat: belső pontjainak létezését és Lebesgue-mértékük pozitívítását tanulmányozták. Az ezekben a cikkekben bevezetett bizonyítási ötletek nagyon jól alkalmazhatóak voltak a szivacsok racionális vetületeinek tanulmányozásakor is.

⁴ha mindegyik megegyezik, akkor a Mandelbrot perkolációhoz hasonló viselkedést tapasztalunk.

További jelölések A végtelen szavakat és mátrixokat félkövér betűkkel, míg a vektorokat és véges szavakat aláhúzással jelöljük. Egy $2 \leq K \in \mathbb{N}$ esetén a $[K] = \{0, \dots, K-1\}$ és $[K]_1 = \{1, \dots, K\}$ jelöléseket használjuk.

Az \mathcal{I} ábécé esetén \mathcal{I}^n jelöli az n hosszúságú szavak halmazát, $\mathcal{I}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}^n$ a véges szavak halmazát, és $\Sigma^{\mathcal{I}}$ az \mathcal{I} feletti végtelen szavak halmazát. Jelölje $\underline{\theta}|_n$ és $\boldsymbol{\theta}|_n$ az $\underline{\theta}$ véges szó, illetve a $\boldsymbol{\theta}$ végtelen szó n hosszúságú prefixumát. Egy nemnegatív \mathbf{M} mátrix esetén jelölje $M(i, j)$ az i -edik sor j -edik elemét, és $\|\mathbf{M}\| = \sum_i \sum_j M(i, j)$.

Összefoglaló A disszertációban azt vizsgáltuk, hogy a tengelyekre vett vetületeknél megfigyelt tulajdonságok (ahogyan azt a 1. ábra illusztrálja) megjelennek-e általános racionális vetületekre. Kezdetben nem volt világos, hogy léteznek-e hasonló intervallumok, vagy új paraméterintervallumok jelennek-e meg. Végül az eredményeink egyelőre azt mutatják, hogy nem lépnek fel új jelenségek.

2. Felépítés

Ebben a szakaszban bevezetjük a determinisztikus Iterált függvényrendszerek (IFS-ek) egy családját, az úgynevezett *egész-önhasonló IFS-eket*, valamint azt a véletlen folyamatot, amellyel kiválasztjuk, hogy mely elemeket tartjuk meg és melyeket hagyjuk el, mely folyamat végül egy véletlen attraktort generál.

Kontrakciók egy véges $\mathcal{S} := \{S_i(x)\}_{i \in [M]_1}$ listáját *kontrakciós iterált függvényrendszernek* (IFS) nevezzük. Ebben a disszertációban *homogén, egydimenziós, önhasonló* IFS-ekre szorítkozunk, ahol az IFS minden függvénye egy hasonlósági transzformáció: vagyis minden $i \in [M]_1$ esetén, az $S_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés $S_i(x) = rx + t_i$ alakú valamely $r \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ és $t_i \in \mathbb{R}$ esetén.

A továbbiakban a következő jelölést használjuk:

$$S_{i_1 \dots i_n} := S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_n}.$$

Létezik olyan kompakt $B \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre $S_i(B) \subset B$. Hutchinson egy klasszikus eredménye szerint ehhez az \mathcal{S} IFS-hez egyértelműen létezik olyan nem üres kompakt halmaz, amely kielégíti a következőt:

$$\Lambda = \bigcup_{i \in [M]_1} S_i(\Lambda).$$

Erre a halmazra *attraktorként* hivatkozunk, és megjegyezzük, hogy ekvivalens módon a következőképpen is definiálható:

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{(i_1, \dots, i_n) \in [M]_1^n} S_{i_1 \dots i_n}(B).$$

2.1. Egész-önhasonló IFS-ek

Megköveteljük, hogy az IFS-re a következő két tulajdonság teljesüljön.

- (a) Minden kontrakció ugyanannak az egész számnak a reciproka: azaz $r = 1/L$ valamely $L \geq 2$ egész számra.
- (b) Minden t_i eltolás racionális szám.

Emlékeztetjük az olvasót, hogy ilyen IFS-ekre standard példák a 2-dimenziós szivacsok racionális vetületei. Ezek az IFS-ek konjugálhatók olyan önhasonló IFS-ekké, amelyek közös kontrakciós aránya $1/L$ és eltolásai $0 = t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_M$, ahol $t_i \in \mathbb{Z}$ minden i -re, és $L - 1$ osztja t_M -et. Az ilyen alakú IFS-eket *egész-önhasonló IFS*-nek (ISSIFS) nevezzük. Ezeknek az IFS-eknek a cylinderhalmazai ($S_i([0, t_M L / (L - 1)])$) jelentős átfedéseket tartalmaznak. Általában véve az átfedések jelentősen megbonyolítják az attraktor geometriai elemzését. Azért ezeket az IFS-eket vizsgáljuk, mert az a struktúra, ahogy az átfedések megjelennek rendkívül jól jellemezhető mátrixok egy véges halmazának segítségével.

Rögzítünk egy \mathcal{S} egész-önhasonló IFS-t, amelynek közös kontrakciós aránya $1/L$, és $\#\mathcal{S} = M$. Legyen η az \mathcal{S} IFS-hez és az $(1/M, \dots, 1/M)$ valószínűségi vektorhoz tartozó önhasonló mérték: $A \subset \mathbb{R}$ Borel halmazokra az η mérték kielégíti a következőt:

$$\eta(A) = \sum \frac{1}{M} \eta(S_j^{-1}A).$$

Ezután bevezetjük $\mathbb{R} \pmod{0}$ -felosztásainak egy családját, és ezen felosztások elemeire *L-adikus intervallumokként* hivatkozunk:

$$\mathcal{D}_k := \{[(i-1)L^{-k}, iL^{-k}] : i \in \mathbb{Z}\}, \quad k \in \{-1, 0, 1, 2, \dots\}. \quad (2.1)$$

Különös figyelmet fordítunk a \mathcal{D}_{-1} azon elemeire, amelyek pozitív η -mértékűek. Ezeket *alapintervallumoknak* nevezzük. Az alapintervallumok a következők:

$$\left\{ J^{(u)} := [b_u L, (b_u + 1)L] \right\}_{u=1}^N, \quad b_u \in \mathbb{N}, \quad b_u < b_{u+1}, \quad u = 1, \dots, N-1. \quad (2.2)$$

A legkisebb intervallum, amely tartalmazza az összes alapintervallumot:

$$I = \left[0, L \frac{t_{M-1}}{L-1} \right]. \quad (2.3)$$

Minden $k \in [N]_1$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén a $J^{(k)}$ alapintervallum felosztható a \mathcal{D}_{n-1} -ben foglalt L^n darab, egyenként $L^{-(n-1)}$ hosszúságú egybevágó részintervallumra, amelyeket $J_{\underline{\theta}}^{(k)}$ -val jelölünk, ahol $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in [L]^n$. Pontosabban, $u \in [N]_1$ és $\underline{\theta} \in [L]^n$ esetén:

$$J_{\underline{\theta}}^{(u)} = \left[b_u L + \sum_{\ell=1}^n \theta_\ell L^{-(\ell-1)}, b_u L + \sum_{\ell=1}^n \theta_\ell L^{-(\ell-1)} + L^{-(n-1)} \right].$$

Ezeknek az IFS-eknek egy kulcstulajdonságú, fentebb említett tulajdonsága, hogy lehetővé tesz egy az átfedéseket kódoló mátrixreprezentációt. Ezt Victor Ruiz vezette be a [24] cikkben, determinisztikus IFS-ek vizsgálatára. Minden $\underline{\theta} \in [L]^n$ és $n \geq 1$ esetén definiáljuk a következő $N \times N$ -es mátrixot:

$$B_{\underline{\theta}}(u, v) := \# \left\{ \underline{\ell} \in [M]_1^n : S_{\underline{\ell}}(J^{(v)}) = J_{\underline{\theta}}^{(u)} \right\}.$$

Megmutatható, hogy $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in [L]^n$ és $n > 1$ esetén,

$$B_{\underline{\theta}}(u, v) = (\mathbf{B}_{\theta_1} \cdots \mathbf{B}_{\theta_n})(u, v).$$

2.2. A véletlen folyamat

2.1. Definíció (Helyettesítéses önhasonló halmazok). Legyen $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i=1}^M$ egy egész önhasonló IFS és legyen $\underline{p} = (p_h)_{h \in \mathcal{P}([M]_1)}$ egy valószínűségi eloszlás az $[M]_1$ hatványhalmazán. A megfelelő helyettesítéses önhasonló Λ halmazt a következőképpen definiáljuk: Az első lépésben kiválasztunk egy véletlen $\mathcal{E}_1 \subset [M]_1$ részhalmazt úgy, hogy $\mathbb{P}(\mathcal{E}_1 = h) = p_h$ teljesüljön bármely $h \in \mathcal{P}([M]_1)$ esetén. Tegyük fel, hogy az n -edik szinten megtartott csúcsok $\mathcal{E}_n \subset [M]_1^n$ -nel jelölt halmazát már megszerkesztettük. Minden megtartott $\underline{i} \in \mathcal{E}_n$ csúcshoz (függetlenül) választunk egy véletlen $\mathcal{E}_1^{[\underline{i}]} \subset [M]_1$ részhalmazt, amelynek eloszlása megegyezik az \mathcal{E}_1 \underline{p} eloszlásával. Egy megtartott \underline{i} csúcs leszármazottainak halmazát az $O(\underline{i}) = \{\underline{i}k \in [M]_1^{n+1} : k \in \mathcal{E}_1^{[\underline{i}]}\}$ képlet definiálja.

Ezután az $n + 1$ -edik szinten megtartott csúcsokat az összes leszármazott uniójaként definiáljuk:

$$\mathcal{E}_{n+1} = \bigcup_{\underline{i} \in \mathcal{E}_n} O(\underline{i}) \subset [M]_1^{n+1}.$$

Végül a helyettesítéses önhasonló halmazt a következőképpen definiáljuk:

$$\Lambda := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\underline{i} \in \mathcal{E}_n} S_{\underline{i}}(I),$$

ahol I -t a (2.3) képlet definiálja.

Az alkalmazásokban egy speciális családot tekintünk, amelyre pénzfeldobásos egész-önhasonló IFS-ként hivatkozunk. Ebben az esetben rögzítünk egy $p \in (0, 1]$ valószínűségi paramétert, és a perkolációs folyamatot a cylinder halmazokon vesszük. Ez az a speciális eset, amikor a $\underline{p} = (p_h)_{h \subset [M]_1}$ eloszlást a következőképpen adjuk meg:

$$p_h = p^{\#h} (1 - p)^{M - \#h}. \quad (2.4)$$

2.3. Egy fontos mennyiség: A várhatóérték-mátrixok

Az eredményeket a várhatóérték-mátrixok fogalmaival mondjuk ki. Ezek a $\{\mathbf{B}_\theta\}_{\theta \in [L]}$ mátrixok várhatóérték-analógjai. Nevezetesen, legyenek $\{\mathbf{M}_\theta\}_{\theta \in [L]^*}$ azok a mátrixok, amelyek kielégítik a következőt:

$$M_{\underline{\theta}}(u, v) = \mathbb{E} \left(\# \left\{ \underline{\ell} \in [M]_1^n : S_{\underline{\ell}}(J^{(v)}) = J_{\underline{\theta}}^{(u)} \right\} \right). \quad (2.5)$$

minden $\underline{\theta} \in [L]^n$ esetén.

Megjegyezzük, hogy $(\theta_1, \dots, \theta_n) = \underline{\theta} \in [L]^n$ esetén $\mathbf{M}_{\underline{\theta}} = \mathbf{M}_{\theta_1} \cdots \mathbf{M}_{\theta_n}$, és hogy a pénzfeldobásos rendszerekre $\mathbf{M}_{\underline{\theta}} = p^n \mathbf{B}_{\underline{\theta}}$.

3. Eredmények és alkalmazások

A disszertáció a következő cikkeken alapul: [18–20]. Ezek mindegyike már elfogadott, és Simon Károlyval közös munkán alapul. A 3.2., 3.6. tétel és a 3.7., 3.8. lemma a [20] cikkben jelent meg. Ott ezeket magasabb dimenzióban, pénzfeldobásos rendszerekre bizonyítottuk. A 3.12. tétel ebben a formában a [20] cikkben jelent meg. Ennek általánosabb verziója, a 3.11. tétel a 3.15. tétellel együtt ebben a disszertációban jelenik meg először.

Ebben a szakaszban minden eredményt egy egész IFS-hez konjugált 1-dimenziós IFS cilinderein alkalmazott helyettesítéses rendszerek attraktoraira mondunk ki. Az IFS $\mathcal{S} = \{S_i(x) = x/L + t_i\}_{i=1}^M$, az attraktort Λ jelöli (ahol a Λ_p jelölést a p valószínűségi paraméterű pénzfeldobásos rendszereknek tartjuk fenn). Hangsúlyozzuk, hogy a közös kontrakciós arány L^{-1} , a leképezések száma M , és N darab alapintervallum van, amelyeket $J^{(1)}, \dots, J^{(N)}$ jelöl.

A várhatóérték-mátrixok $\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_0, \dots, \mathbf{M}_{L-1}\}$. Ezek a mátrixok konstrukciójukból adódóan nemnegatívak. Egy nemnegatív mátrixot *megengedettnek* nevezük, ha minden várhatóérték-mátrix minden sora és oszlopa tartalmaz szigorúan pozitív elemet.

3.1. Definíció (közös pozitívan irreducibilis mátrixok). Tekintsük a nemnegatív, megengedett mátrixok $\{\mathbf{M}_0, \dots, \mathbf{M}_{L-1}\}$ halmazát. Adott $\Sigma^{[L]}$ -en értelmezett ν valószínűségi mérték esetén azt mondjuk, hogy a mátrixok *közös pozitívan irreducibilis* tulajdonságúak, ha létezik olyan $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \Sigma_n^{[M]1}$ véges szó, amelyre a $\mathbf{M}_{\theta_1} \cdots \mathbf{M}_{\theta_n}$ egy szigorúan pozitív mátrix, és $\nu([\theta_1, \dots, \theta_n]) > 0$. Amikor a mérték implicit, az alatt azt értjük, hogy a mátrixok az egyenletes eloszlásra nézve közös pozitívan irreducibilis tulajdonságúak.

3.1. Ergodikus mértékek a véletlen attraktoron

Az itt szereplő tétel részben a [19] cikkbeli alapul, és a [20] cikkben jelent meg pénzfeldobásos rendszerekre. A fraktálgeometriához való hozzájárulásaink a következők:

- A disszertációban bebizonyítjuk a [21, 2.6. tétel]-t a véletlen környezetben zajló többtípusú elágazó folyamatok kihalásáról, feltételezve, hogy a várhatóérték-mátrixok csak egy gyenge pozitivitási feltételt elégítenek ki. Hasonló jellegű eredmények léteznek az irodalomban (lásd például [1, 14, 27], vagy a [28] összefoglaló cikket), de csak a várhatóérték-mátrixokra vonatkozó erős pozitivitási feltételezésekkel. Ezek a feltételezések nem teljesülnek az átfedésekkel rendelkező véletlen önhasonló halmazokat kódoló várhatóérték-mátrixokra.
- A [21, 2.6. tétel] felhasználásával kiterjesztjük azokat az eredményeket, amelyek egy véletlen halmaz pozitív mértékűségét vizsgálják egy rögzített ergodikus mértékre (például a Lebesgue-mértékre) vonatkozóan, a csak egzakt vagy elhanyagolható átfedésekkel rendelkező halmazokról az általános egész IFS-ekre. (3.2. tétel.)

Fogalmak

Jelölje $\Pi_L: \Sigma^{[L]} \rightarrow [0, 1]$ az L -adikus kódoló leképezést, és egy $J^{(u)}$ alapintervallum esetén definiáljuk a $\Gamma_u: [0, 1] \rightarrow J^{(u)}$ projekciót $x \in [0, 1]$ -re a $\Gamma_u(x) = L(b_u + x)$ képlettel. Tekintsük a $\Gamma_u \circ \Pi_L: \Sigma^{[L]} \rightarrow J^{(u)}$ kompozíciót, melyre bevezetjük a következő jelölést:

$$\tilde{\nu} := \sum_{j=1}^N (\Gamma_u \circ \Pi_L)_* \nu, \quad (3.1)$$

ahol $(\Gamma_u \circ \Pi_L)_* \nu$ jelöli a ν előretolt mértékét a $\Gamma_u \circ \Pi_L$ leképezésre vonatkozóan. A

$$\lambda_\nu(\mathcal{M}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{1}{L^n} \sum_{\theta \in [L]^n} \log \|\mathbf{M}_\theta\|,$$

mennyiséget ν -re vonatkozó *Ljapunov-exponensnek* nevezzük. Amikor a mérték nincs specifikálva, akkor a $\Sigma^{[L]}$ -en vett egyenletes mértékre gondolunk. Ekvivalens módon $\lambda_\nu(\mathcal{M}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n \log(\|\mathbf{M}_{\theta_n}\|)$ teljesül ν -majdnem minden $\theta \in \Sigma^{[L]}$ esetén.

Ezen szakasz fő eredménye a 3.2. Tétel. Ez szorosan kapcsolódik bizonyos elágazó folyamatok kihalásához. A kritikus eset kezeléséhez egy további regularitási feltételre van szükségünk, amelyet most ismertetünk.

Definiáljuk az $\underline{Y}(\theta, v) = (\#\{i \in \mathcal{E}_1 : S_i(J^{(w)}) = J_\theta^{(v)}\})_{w \in [N]_1}$ vektorértékű valószínűségi változókat $\theta \in [L]$ és $v \in [N]_1$ esetén.

1. Feltétel. Egy rögzített $\Sigma^{[L]}$ -en vett ergodikus ν mértékhez létezik olyan $\theta \in [L]$, amelyre $\nu([\theta]) > 0$, és minden $v \in [N]_1$ esetén:

$$\mathbb{P}(\underline{Y}(\theta, v) \in \{0\} \cup \bigcup_{j=1}^N \underline{e}_j) < 1.$$

Eredmények

3.2. Tétel. *Tekintsünk egy ergodikus ν mértéket $\Sigma^{[L]}$ téren. Ha az \mathcal{M} közösen pozitívan irreducibilis a ν -re vonatkozóan, akkor a következők teljesülnek a $\tilde{\nu}$ (3.1) mértékre:*

- Ha $\lambda_\nu(\mathcal{M}) > 0$, akkor $\tilde{\nu}(\Lambda) > 0$.
- Ha $\lambda_\nu(\mathcal{M}) < 0$, akkor $\tilde{\nu}(\Lambda) = 0$.
- Ha $\lambda_\nu(\mathcal{M}) = 0$ és a véletlen attraktorhoz tartozó $\{\underline{Y}(\theta, v)\}$ vektorértékű valószínűségi változók kielégítik a 1. Feltételt, akkor $\tilde{\nu}(\Lambda) = 0$.

Alkalmazások

- **Pozitív Lebesgue-mérték pénzfeldobásos rendszerek esetén.** A p paraméterű pénzfeldobásos rendszer esetén tekintjük a determinisztikus rendszerhez tartozó $\mathcal{B} = (\mathbf{B}_\theta)_{\theta \in [L]}$ mátrixhalmazt. Tegyük fel, hogy ezek közösen pozitívan irreducibilis tulajdonságúak. Ekkor

$$\text{Leb}(\Lambda_p) > 0 \text{ akkor és csak akkor, ha } p > \exp(-\lambda(\mathcal{B})),$$

ahol $\lambda(\mathcal{B})$ a \mathcal{B} mátrixhalmazhoz tartozó Ljapunov-exponens. Jellemzően nagyon nehéz megbecsülni egy mátrixhalmazhoz tartozó Ljapunov-exponenst.

3.3. Felhasználás. Pollicott és Vytnova bebizonyították (ez személyes kommunikáción alapul), hogy a derékszögű Sierpiński-szőnyeg 45 fokos vetülete esetén a $\lambda(\mathcal{B})$ Ljapunov-exponens alsó és felső korlátja 0.3961, illetve 0.3962. Következésképpen $p > 0.673$ esetén $\text{Leb}(\Lambda_p) > 0$ majdnem biztosan a nem-kihalás feltétele mellett.

3.2. Belső pontok hiánya és pozitív Lebesgue-mérték

Az eredmények a következőképpen foglalhatók össze:

- Bizonyítunk egy tételt a belső pontok nemlétezéséről az egész IFS-ek véletlen attraktoraiban. Ez a [8, 1. tétel] eredmény kiterjesztésének tekinthető, amely éles feltételt ad a belső pontok nemlétezésére a teljes vagy elhanyagolható átfedésekkel rendelkező IFS-ek esetén. Megjegyezzük, hogy az alsó spektrálsugár segítségével megfogalmazott éles eredmény ismert két véletlen Cantor-halmaz különbségére, ehhez lásd [4].
- Pénzfeldobásos egész IFS esetén olyan feltételeket adunk meg, amelyek teljesülése mellett létezik a valószínűségi paramétereknek egy nemtriviális (p_0, p_1) intervalluma úgy, hogy minden $p_0 < p < p_1$ esetén a Λ_p véletlen attraktor pozitív Lebesgue-mértékű, de a belseje majdnem biztosan üres, feltételezve a nem-kihalást.

Annak érdekében, hogy ezt a két fogalmat egyszerre tárgyalhassuk, bevezetjük a *szubadditív nyomásfüggvény* fogalmát. Ez kódolja a két mennyiséggel kapcsolatos információkat, mivel a nullában vett jobb oldali deriváltja pontosan a Ljapunov-exponens, a mínusz végtelenben vett aszimptotája pedig felülről becsüli az alsó spektrálsugár logaritmusát.

Fogalmak

3.4. Definíció. Az *érdekes paraméterintervallum* egy olyan (p_0, p_1) nyílt intervallum, ahol $0 \leq p_0 < p_1 \leq 1$, és amelyre minden $p \in (p_0, p_1)$ esetén a Λ_p véletlen (érmedobós) attraktor belseje majdnem biztosan üres, de majdnem biztosan pozitív Lebesgue-mértékű, feltételezve a nem-kihalást.

3.5. Definíció (Alsó spektrálsugár). Rögzítsük nemnegatív mátrixok egy $\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_0, \dots, \mathbf{M}_{L-1}\}$ halmazát. Defináljuk a következőt mennyiséget:

$$\check{\rho}_n(\mathcal{M}, \|\cdot\|) := \inf\{\|\mathbf{M}_{\theta_1} \cdots \mathbf{M}_{\theta_n}\|^{\frac{1}{n}}, \mathbf{M}_{\theta_j} \in \mathcal{M}, 1 \leq j \leq n\}.$$

Ekkor az \mathcal{M} mátrixok *alsó spektrálsugara* a következőképpen adott:

$$\check{\rho}(\mathcal{M}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \check{\rho}_n(\mathcal{M}, \|\cdot\|).$$

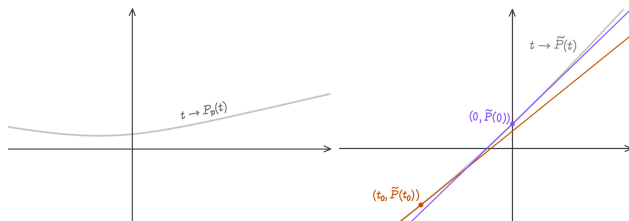
Ez a határérték a szubadditivitás és a Fekete-féle szubadditív lemma miatt létezik (az alsó spektrálsugárról bővebben lásd [12]). Továbbá intuitívan világos (és a [12] cikkben expliciten bizonyított), hogy $\check{\rho}(\mathcal{M})$ -et felülről becsüli bármely n -szeres mátrixszorzat spektrálsugarának az $1/n$ -edik hatványa. A 3.6. tételből arra következtethetünk, hogy a várhatóérték-mátrixokra vonatkozó közös pozitívan irreducibilitási feltétel mellett, ha $\lambda = \lambda_\nu(\mathcal{M}) > 0$, de $\log(\check{\rho}(\mathcal{M})) < 0$, akkor az attraktor pozitív Lebesgue-mértékű, de a belseje üres (majdnem biztosan, feltéve a nem-kihalást).

Most bevezetjük a *szubadditív nyomásfüggvényt*:

$$P(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log\left(\sum_{\theta \in [L]^n} \|\mathbf{M}_\theta\|^t\right). \quad (3.2)$$

A szubadditív nyomás tulajdonságait a [9, 10] cikkek bizonyítják. A releváns tulajdonságai, hogy \mathcal{M} esetén $P(t)$ minden $t \in \mathbb{R}$ -re létezik, továbbá konvex és folytonos. Sőt, $t > 0$ esetén folytonosan differenciálható.

Speciálisan $\lim_{t \rightarrow 0^+} P'(t) = \lambda$ és $\lim_{t \rightarrow -\infty} P(t)/t \geq \log(\check{\rho}(\mathcal{M}))$. Ebből következik, hogy ha $P(t)$ szigorúan konvex a $(-\infty, 0]$ egy részintervallumán, akkor $\log(\check{\rho}(\mathcal{M})) < \lambda$.



2. ábra. Az első ábra az \mathcal{M} várhatóérték-mátrixokhoz tartozó szubadditív nyomás tulajdonságait ábrázolja (amikor létezik az érdekes paraméterintervallum). A második ábra a \mathcal{B} mátrixokhoz tartozó szubadditív nyomás érintőit mutatja, valamint az érintőket a nullában és egy $t_0 < 0$ pontban.

Eredmények

3.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy a várhatóérték-mátrixok kielégítik a $\check{\rho}(\mathcal{M}) < 1$ feltételt. Ekkor az attraktor belseje majdnem biztosan üres.*

3.7. Lemma. *Tegyük fel, hogy \mathcal{M} közösen pozitívan irreducibilis. Ha $P(t)$ szigorúan konvex a $(-\infty, 0)$ egy részintervallumán, akkor létezik az érdekes paraméterintervallum.*

Itt megemlítiünk még egy utolsó eredményt, amely Tom Rush egy általánosabb tételének [25] a következménye, és amelyet néhány speciális esetben alkalmazhatunk.

3.8. Lemma (Tom Rush egy tételének következménye). *Tegyük fel, hogy \mathcal{M} invertálható mátrixokból áll, és*

- *létezik olyan $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$, amelynek sajátértékeinek modulusa mind különbözőnek;*
- *és létezik olyan $\tilde{\mathbf{M}} \in \mathcal{M}$, hogy $\tilde{\mathbf{M}}(V) \cap W = \{0\}$ a kiegészítő dimenziójú, \mathbf{M} -invariáns alterek bármely párjára.*

Ekkor a nyomás vagy affin a teljes értelmezési tartományán, vagy szigorúan konvex a 0 egy környezetében.

Alkalmazások

- **Érmedobós rendszerek** Érmedobós rendszerek esetén a nyomás felírható a következő alakban:

$$P_p(t) = \tilde{P}(t) + t \log(p),$$

ahol $\tilde{P}(t)$ a determinisztikus IFSt jellemző $\{\mathbf{B}_\theta\}_{\theta \in [L]}$ mátrixokhoz tartozó nyomás. Ha a $\{\mathbf{B}_\theta\}_{\theta \in [L]}$ esetén a nyomás kielégíti a 3.7. lemmában

említett szigorú konvexitási feltételt, akkor könnyen belátható, hogy $p \in (e^{-\lambda(\mathcal{B})}, \check{\rho}(\mathcal{B}))$ esetén a véletlen attraktor pozitív Lebesgue-mértékű, de a belseje majdnem biztosan üres, feltételezve a nem-kihalást.

• Néhány specifikus példa érmedobós rendszerekre

3.9. *Felhasználás.* Bizonyos érmedobós rendszereknél vannak becslések a Ljapunov-exponensre és az alsó spektrálsugárra, amelyek bizonyítják az érdekes paraméterintervallum létezik.

3.10. *Felhasználás.* Egy egyszerű számolás megmutatja, hogy a 3.8. lemma feltételei teljesülnek a 4.2 példa esetében. Azt a tényt, hogy a nyomás ennél a példánál az egy közelében nem affin, Bárány és Rams bizonyította, lásd [2, 1.3. tétel bizonyítása]. Következésképpen ebben az esetben az érdekes paraméterintervallum létezik.

3.3. Belső pontok létezése

A területhez való hozzájárulás a következőképpen jellemezhető:

- Bizonyítunk egy tételt (3.11. tétel) a véletlen attraktorban lévő belső pontok létezéséről. Ez az elhanyagolható vagy pontos átfedésekkel rendelkező halmazokra vonatkozó hasonló eredmények kiterjesztése általános egész-önhasonló IFS-ekre. Megemlítjük, hogy az alsó spektrálsugár segítségével megfogalmazott éles eredmény megjelent a [4] cikkben két véletlen Cantor-halmaz különbségére.
- Példákat adunk (3.14. alkalmazás), ahol a *Wolfram Mathematica* programozási nyelv használatával megbecsültük azt a valószínűségi paramétert, amelyenél (feltételezve a nem-kihalást) az attraktor majdnem biztosan tartalmaz egy intervallumot.

Eredmények

3.11. Tétel. *Tegyük fel, hogy az \mathcal{M} várhatóérték-mátrixok megengedett mátrixok, és továbbá létezik egy $\mathcal{U} = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_\ell\}$ vektorhalmaz, ahol $\underline{u}_i = (u_i(1), \dots, u_i(N)) \in \mathbb{N}^N \setminus \{\underline{0}\}$, úgy, hogy a következők teljesülnek:*

1. *Létezik $v \in [N]_1$, $S^* \in \mathbb{N}$, $\underline{u}^* \in \mathcal{U}$ és $\underline{\theta} \in [L]^{S^*}$ úgy, hogy*

$$\mathbb{P}(Y(\underline{\theta}^*, v) \geq \underline{u}^*) > 0,$$

az $Y(\underline{\theta}, v) = (\#\{i \in \mathcal{E}_n : S_i(J(w)) = J_{\underline{\theta}}^{(v)}\})_{w \in [N]_1}$ vektor értékű valószínűségi változókra, $\underline{\theta} \in [L]^n$ és $v \in [N]_1$ esetén.

2. Létezik $R \in \mathbb{N}$, $\gamma > 1$ és $h^* \subset [M]_1$ úgy, hogy $p_h > 0$, továbbá minden $\underline{\theta} \in [L]^R$ és minden $\underline{u} \in \mathcal{U}$ esetén létezik egy $\underline{v} \in \mathcal{U}$, amelyre

$$\underline{u}^T \mathbf{B}_{\underline{\theta}}^{(h^*)^R} \geq \gamma \underline{v}, \text{ és } \underline{u}^T \mathbf{M}_{\underline{\theta}} \geq \gamma \underline{v},$$

ahol $(h^*)^R = (h^*, \dots, h^*)$.

Ekkor a Λ véletlen attraktor majdnem biztosan tartalmaz egy intervallumot, a nem-kihalást feltételezve.

Alkalmazások

Érmedobós rendszerek Érmedobós rendszerek esetén a 3.11. tétel a következőképpen egyszerűsödik.

3.12. Tétel. Tekintsük azt az érmedobós önhasonló egész IFS-t, amelynek várhatóérték-mátrixai $\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_0 = p \cdot \mathbf{B}_0, \dots, \mathbf{M}_{L-1} = p \cdot \mathbf{B}_{L-1}\}$. Tegyük fel, hogy létezik egy nem üres $\mathcal{U} := \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m\}$ halmaz, ahol $\underline{u}_i = (u_i(1), \dots, u_i(N)) \in \mathbb{N}^N \setminus \{0\}$, úgy, hogy a következők teljesülnek:

1. Létezik $\underline{u}^* \in \mathcal{U}$ és $\underline{\theta}^* \in [L]^{S^*}$ valamely $S^* \geq 1$ esetén, valamint $U^* \in [N]_1$ úgy, hogy

$$\underline{e}_{U^*}^T \mathbf{B}_{\underline{\theta}^*} \geq \underline{u}^*. \quad (3.3)$$

2. Létezik egy $\gamma > 1$ és egy R szint úgy, hogy minden $\underline{u} \in \mathcal{U}$ és minden $\underline{\theta} \in [L]^R$ esetén létezik egy $\underline{v} \in \mathcal{U}$, amelyre

$$\underline{u}^T \mathbf{M}_{\underline{\theta}} \geq \gamma \underline{v}.$$

Ekkor Λ_p majdnem biztosan tartalmaz intervallumot, feltételezve a rendszer nem-kihalását.

3.13. Corollary. A 3.12. tételben lévő feltételek mellett tegyük fel, hogy a következők teljesülnek:

- létezik olyan $\theta \in [L]$, amelyre a \mathbf{B}_θ mátrixnak van egy szigorúan pozitív sora, és
- minden $\theta \in [L]$ esetén az \mathbf{M}_θ mátrixban minden oszlopösszeg nagyobb, mint egy.

Ekkor a véletlen attraktor majdnem biztosan tartalmaz egy intervallumot, feltételezve a nem-kihalást.

3.14. *Felhasználás* (4.2. példa). A 4.2. példa esetében (amely a „0-1-3 probléma”, $1/2$ -es kontrakciós aránnyal),

$$\mathcal{U} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$$

és megbecsültük az optimális γ -t a 20-adik szinten, ami a következő eredményt adta: $p > 463^{-1/20} \sim 0.7357$ esetén Λ_p majdnem biztosan tartalmaz egy intervallumot feltételezve a nem-kihalást.

3.4. A véletlen attraktor dimenzióelmélete

Fogalmak

Ebben az eredményben ismét a mátrixszorzatra definiált szubadditív nyomásfüggvényre támaszkodunk (lásd (3.2)). Ez a rész a következőképpen járul hozzá a fraktálgeometria területéhez:

- Adunk egy tételt a véletlen attraktor majdnem biztos dimenziójának értékére vonatkozóan. Ez az elhanyagolható vagy pontos átfedésekkel rendelkező halmazokra vonatkozó hasonló eredmények kiterjesztése az egész IFS-ek esetére. (3.15. tétel.)

Eredmények

3.15. Tétel. *Rögzítsünk egy $\mathcal{S} = \{S_i(x) = x/L + t_i\}_{i=1}^M$ IFS-t, amelynek véletlen attraktora Λ , és várhatóérték-mátrixai $\mathcal{M} = \{\mathbf{M}_0, \dots, \mathbf{M}_{L-1}\}$. Tegyük fel, hogy \mathcal{M} közösen pozitívan irreducibilis. A Λ véletlen attraktor Hausdorff-, doboz- és pakolási dimenziójának közös értéke*

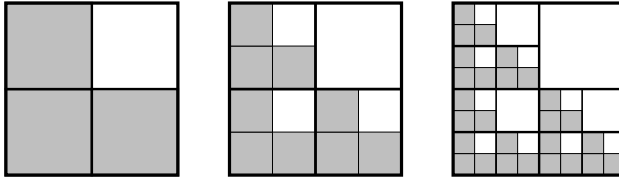
$$\dim \Lambda = \inf_{t \in [0,1]} \frac{P(t)}{\log L},$$

majdnem biztosan, feltételezve a nem-kihalást.

Alkalmazások

Nagyon nehéz ezt a dimenzióformulát numerikusan kiszámítani vagy megbecsülni. Úgy gondoljuk, hogy ahhoz az esethez képest, amikor pontos vagy elhanyagolható átfedések vannak, nem fordulhatnak elő új jelenségek. Bizonyos következtetéseket le lehet vonni a halmazok dimenziójára vonatkozóan, mint például:

- Tegyük fel, hogy adott egy kétdimenziós szőnyeg azzal a tulajdonsággal, hogy a kontrakciós arány reciproka (L) nem osztója a leképezések számának (M). Tekintsünk egy érmedobós rendszert, amely ennek az



3. ábra. A (determinisztikus) derékszögű Sierpiński-szőnyeg és a $\text{proj}(\mathcal{G}_p)$ -nek megfelelő IFS közelítései.

IFS-nek a cylinder halmazain fut p paraméterrel. Rögzítsük ennek az IFS-nek egy tetszőleges racionális ortogonális vetületét egy egyenesre. Ekkor létezik egy nemtriviális (p_0, p_1) paraméterintervallum úgy, hogy

$$\dim_{\mathbb{H}}(\text{proj}(\Lambda_p)) < \dim_{\mathbb{H}}(\Lambda_p).$$

- Érm dobós rendszerek esetén nem létezik p -nek olyan paraméterintervalluma, amelyre $\text{Leb}(\Lambda_p) = 0$, de $\dim_{\mathbb{H}}(\Lambda) \geq 1$.

4. Példák

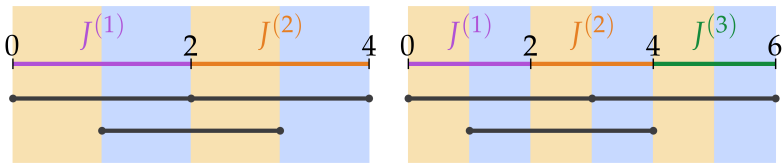
4.1. A derékszögű Sierpiński-szőnyeg vetületei

Ebben a szakaszban a derékszögű Sierpiński-szőnyeg (a következő \mathbb{R}^2 -beli önhasonló IFS attraktora) vetületeit vizsgáljuk.

$$\mathcal{S} := \left\{ S_i(x) = \frac{1}{2}x + t_i \right\}_{i=0}^3,$$

ahol $\{t_i\}_{i=0}^3$ a következő halmaz egy felsorolása: $\{0, \frac{1}{2}\}^2 \setminus \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$. Az első pár szintű közelítésekhez lásd az 3. ábrát. Tekintsük a determinisztikus IFS érm dobós randomizációját $p \in (0, 1]$ paraméterrel. A véletlen attraktort \mathcal{G}_p -vel jelöljük. A derékszögű Sierpiński-szőnyeg, valamint a vetületei akkor és csak akkor nem üresek, ha $p > 1/3$, és dimenziója majdnem biztosan $\log_2(3p)$ (feltételezve a nem-kihalást).

4.1. Példa (A véletlen derékszögű Sierpiński-szőnyeg 45-fokos vetülete). Tekintsük a $\text{proj} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{proj}(x, y) := -x + y$ leképezést, amely a 45-fokos vetület átskálázott verziója. Ekkor a $\text{proj}(\mathcal{G}_p)$ (lásd a 3. ábrát) a következő IFS-t adja: $\mathcal{S} = \{S_i(x) = \frac{1}{2}x + 2(i-1)\}_{i=1}^3$. Ebben az esetben $L = N = 2$. A típusokat az alábbi alapintervallumok határozzák meg: $J^{(0)} := [0, 2]$ és $J^{(1)} := [2, 4]$.



4. ábra. A vetített IFS-ek ábrázolása.

A megfelelő mátrixok a következők:

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Itt összegyűjtjük a disszertáció tételeinek alkalmazásait erre a példára.

- A 3.3. alkalmazásból következik, hogy $p \leq 0.672$ esetén a véletlen attraktor Lebesgue-mértéke majdnem biztosan 0, azonban $p \geq 0.673$ esetén a Lebesgue-mérték pozitív majdnem biztosan a nem kihalást feltételezve.
- Világos, hogy $p = 1$ esetén a véletlen attraktor (amely majdnem biztosan megegyezik a determinisztikus attraktoral) belseje nem üres. Mivel mindkét mátrix spektrálsugara 1, ebből következik, hogy $p < 1$ esetén a belseje majdnem biztosan üres. Megemlítjük, hogy ugyanez a helyzet áll elő, ha a koord inátavetületeket tekintjük.
- Ebből következik, hogy létezik egy paraméterintervallum, ahol a véletlen attraktor belseje üres, de a Lebesgue-mértéke pozitív majdnem biztosan a nem-kihalástre feltételezve.

Ezt az 5. ábra foglalja össze. Az ábra továbbá tartalmazza a dimenzióformula explicite nem megfogalmazott következményeit.

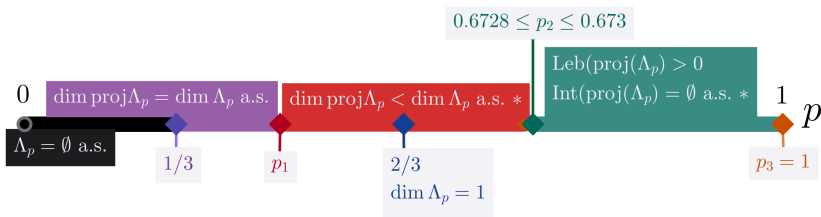
4.2. Példa (0-1-3, 1/2-es kontrakcióval).

$$S_i(x) = \frac{1}{2}x + t_i, \quad t_i \in \{0, 1, 3\} \quad (4.1)$$

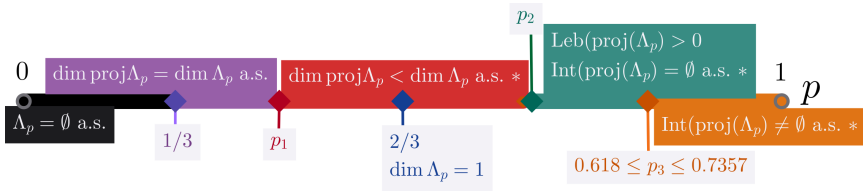
$$J^{(0)} = [0, 2], \quad J^{(1)} = [2, 4], \quad J^{(2)} = [4, 6].$$

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A 3.14. alkalmazásban bebizonyítottuk, hogy $p > 0.7357$ esetén a véletlen attraktor belseje majdnem biztosan nem üres a nem kihalást feltételezve. Ez



5. ábra. a paraméterintervallumok az 4.1. példa esetében.



6. ábra. a paraméterintervallumok az 4.2. példa esetében.

a viselkedés eltér a 45-fokos és a tengelyvetületektől. Alkalmazhatjuk a 3.8. lemmát annak kimutatására, hogy az érdekes paraméterintervallum létezik. Ezt az 6. ábra foglalja össze, mely továbbá tartalmazza a dimenzióformula explicite nem megfogalmazott következményeit.

Hivatkozások

- [1] K. B. Athreya and S. Karlin. On branching processes with random environments: I: Extinction probabilities. *Ann. Math. Statist.*, 42(5):1499–1520, 1971. ISSN 0003-4851. URL <http://www.jstor.org/stable/2240275>.
- [2] B. Bárány and M. Rams. Dimension of slices of Sierpiński-like carpets. *J. Fractal Geom.*, 1(3):273–294, 2014. ISSN 2308-1309. doi: 10.4171/JFG/8.
- [3] F. M. Dekking and G. R. Grimmet. Superbranching processes and projections of random Cantor sets. *Probability Theory and Related Fields*, 78(3):335–355, 1988. ISSN 0178-8051. doi: 10.1007/BF00334199.
- [4] F. M. Dekking and B. Kuijvenhoven. Differences of random Cantor sets and lower spectral radii. *Journal of the European Mathematical Society (JEMS)*, 13(3):733–760, 2011. ISSN 1435-9855. doi: 10.4171/JEMS/266.

- [5] M. Dekking and K. Simon. On the size of the algebraic difference of two random Cantor sets. *Random Structures & Algorithms*, 32(2):205–222, 2008. ISSN 1042-9832. doi: 10.1002/rsa.20178.
- [6] K. J. Falconer. Random fractals. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 100:559–582, 1986. ISSN 0305-0041. doi: 10.1017/S0305004100066299.
- [7] K. J. Falconer. Projections of random Cantor sets. *Journal of Theoretical Probability*, 2(1):65–70, 1989. ISSN 0894-9840. doi: 10.1007/BF01048269.
- [8] K. J. Falconer and G. R. Grimmett. On the geometry of random Cantor sets and fractal percolation. *Journal of Theoretical Probability*, 5(3): 465–485, 1992. ISSN 0894-9840. doi: 10.1007/BF01060430.
- [9] D.-J. Feng. Lyapunov exponents for products of matrices and multifractal analysis. II: General matrices. *Isr. J. Math.*, 170:355–394, 2009. ISSN 0021-2172. doi: 10.1007/s11856-009-0033-x.
- [10] D.-J. Feng and K.-S. Lau. Differentiability of pressure functions for products of non-negative matrices. In *Complex dynamics and related topics. Lectures from the Morningside Center of Mathematics. Papers from the workshop, Beijing, China, 2002*, pages 129–146. Somerville, MA: International Press, 2003. ISBN 1-57146-121-3.
- [11] John Hawkes. Trees generated by a simple branching process. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 24:373–384, 1981. ISSN 0024-6107. doi: 10.1112/jlms/s2-24.2.373.
- [12] R. Jungers. The joint spectral radius. 385, 01 2009. doi: 10.1007/978-3-540-95980-9.
- [13] J.-P. Kahane and J. Peyriere. Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot. *Adv. Math.*, 22:131–145, 1976. ISSN 0001-8708. doi: 10.1016/0001-8708(76)90151-1.
- [14] N. Kaplan. Some results about multidimensional branching processes with random environments. *Ann. Probab.*, 2:441–455, 1974. ISSN 0091-1798. doi: 10.1214/aop/1176996659.
- [15] J. M. Marstrand. Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimensions. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 4:257–302, 1954. ISSN 0024-6115. doi: 10.1112/plms/s3-4.1.257.
- [16] R. D. Mauldin and S. C. Williams. Random recursive constructions: asymptotic geometric and topological properties. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 295(1):325–346, 1986.

- [17] P. Móra, K. Simon, and B. Solomyak. The Lebesgue measure of the algebraic difference of two random Cantor sets. *Indagationes Mathematicae. New Series*, 20(1):131–149, 2009. ISSN 0019-3577. doi: 10.1016/S0019-3577(09)80007-4.
- [18] V. Orgoványi and K. Simon. Projections of the random Menger sponge. *Asian J. Math.*, 27(6):893–936, 2023. ISSN 1093-6106. doi: 10.4310/AJM.2023.v27.n6.a4.
- [19] V. Orgoványi and K. Simon. Multitype branching processes in random environments with not strictly positive expectation matrices. *Bernoulli*, 2024. URL <https://arxiv.org/abs/2401.12767>. Accepted for publication.
- [20] V. Orgoványi and K. Simon. Interior points and Lebesgue measure of overlapping Mandelbrot percolation sets. Preprint, arXiv:2407.06750 [math.DS] (2024), 2024. URL <https://arxiv.org/abs/2407.06750>.
- [21] V. Orgoványi. Properties of a family of random self-similar iterated function systems on the line. 2026.
- [22] M. Rams and K. Simon. Projections of fractal percolations. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, 35(2):530–545, 2015. ISSN 0143-3857. doi: 10.1017/etds.2013.45.
- [23] M. Rams and K. Simon. Projections of fractal percolations. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 35(2):530–545, 2015. ISSN 0143-3857. doi: 10.1017/etds.2013.45.
- [24] V. Ruiz. Dimension of homogeneous rational self-similar measures with overlaps. *J. Math. Anal. Appl.*, 353(1):350–361, 2009.
- [25] T. Rush. On the superadditive pressure for 1-typical, one-step, matrix-cocycle potentials, 2024.
- [26] K. Simon and L. Vágó. Fractal percolations. In *Dynamical systems. Simons Semester in Banach Center, 2015. Papers based on the courses delivered at the Semester, Będlewo, Poland, September and November, 2015*, pages 183–196. Warsaw: Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, 2018. ISBN 978-83-86806-39-3. doi: 10.4064/bc115-6.
- [27] D. Tanny. On multitype branching processes in a random environment. *Advances in Applied Probability*, 13:464–497, 1981. ISSN 0001-8678. doi: 10.2307/1426781.
- [28] V. A. Vatutin and E. E. Dyakonova. Multitype branching processes in random environment. *Russ. Math. Surv.*, 76(6):1019, 2021.